Испитвање тока функције

Испитивање тока функције $y = f(x)$ подразумева да се аналитичким путем дође до сазнања о понашању функције, као и њеним значајним тачкама у координантном систему, те да се на основу добијених резултата нацрта график те функције. Дакле потребно је испитати:

(1) ДОМЕН (област дефинисаности) ФУНКЦИЈЕ
(2) АСИМПТОТЕ И ТАЧКЕ ПРЕКИДА
(3) ПАРНОСТ (И ПРЕИОДИЧНОСТ)
(4) НУЛЕ И ЗНАК ФУНКЦИЈЕ
(5) МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ
(6) КОНВЕКСНОСТ; КОНКАВНОСТ; ПРВОЈНЕ ТАЧКЕ

На основу добијених резултата нацртати:

(7) ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ

У примеру који следи биће детаљно описан поступак <u>испитивања тока функције</u> као и сва потребна теоретска објашњења за горе наведене ставке, почев од <u>ДОМЕНА ФУНКЦИЈЕ</u> до <u>ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ</u>.

Кључну улогу код испитивања ТОКА ФУНКЦИЈЕ има <u>решавање једначина и неједначина</u>, наиме, помоћу њих ми испитујемо: ДОМЕН и НУЛЕ И ЗНАК ФУНКЦИЈЕ. Треба свакако нагласити да <u>нуле и знак</u> испитујемо три пута.

Први пут испитујемо <u>нуле и знак</u> финкције $\boxed{f(x)}$

Други пут испитујемо <u>нуле и знак</u> функције $\boxed{f'(x)}$ ***да бисмо одредили МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ***

Трећи пут испитујемо <u>нуле и знак</u> функције $\boxed{f''(x)}$ ***да бисмо одредили КОНВЕКСНОСТ; КОНКАВНОСТ; и ПРЕВОЈНЕ ТАЧКЕ.***

<u>ПРИМЕР</u>:
ИСПИТАТИ ТОК И НА ОСНОВУ ДОБИЈЕНИХ РЕЗУЛТАТА НАЦРТАТИ ГРАФИК ФУНКЦИЈЕ: $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}}$.

(1) Домен (област дефинисаности) функције

Домен функције је скуп **x** –ова за које је израз $y = f(x)$ дефинисан т.ј. треба одредити скуп **x** –ова за које је могуће израчунати израз

Овде ћемо решити дати пример.
Ако желите да сазнате више кликните на: (додатни примери >>)

Дата функција $\boxed{f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}}$ **је дефинисана за све вредности** x **за које је именилац** $3-x^2$ **различит од нуле, односно:**

$3 - x^2 \neq 0$

$x^2 \neq 3$

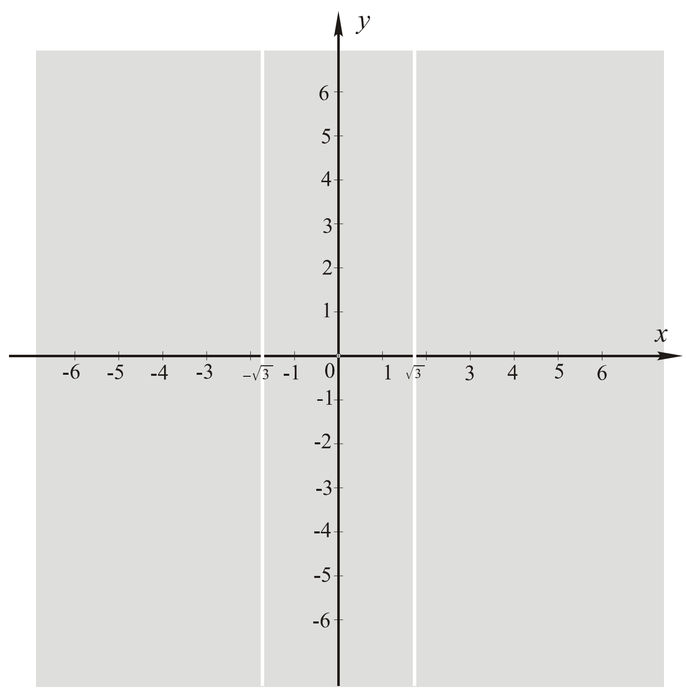
$\boxed{x \neq \pm\sqrt{3}}$

Дакле домен функције је: $D_f = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$**. Другим речима:**

Дата функција је дрфинисана за $\boxed{\forall x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)}$ **.**

Шта нам говори добијени резултат?

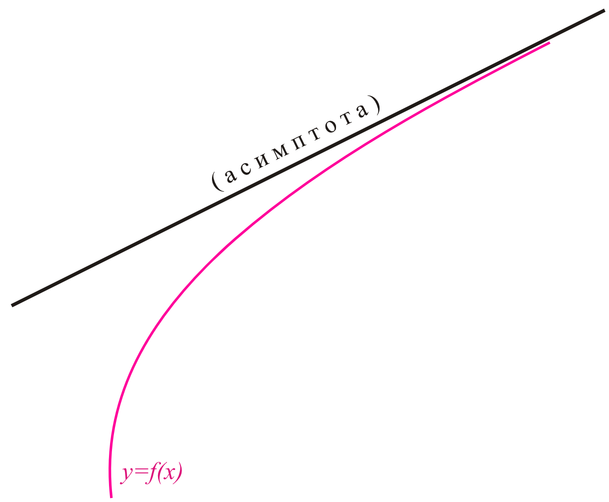
Овај резултат нам говори да се график функције налази у осенченом делу координантног система приказан на следећој слици:



(Повратак на почетак >>)

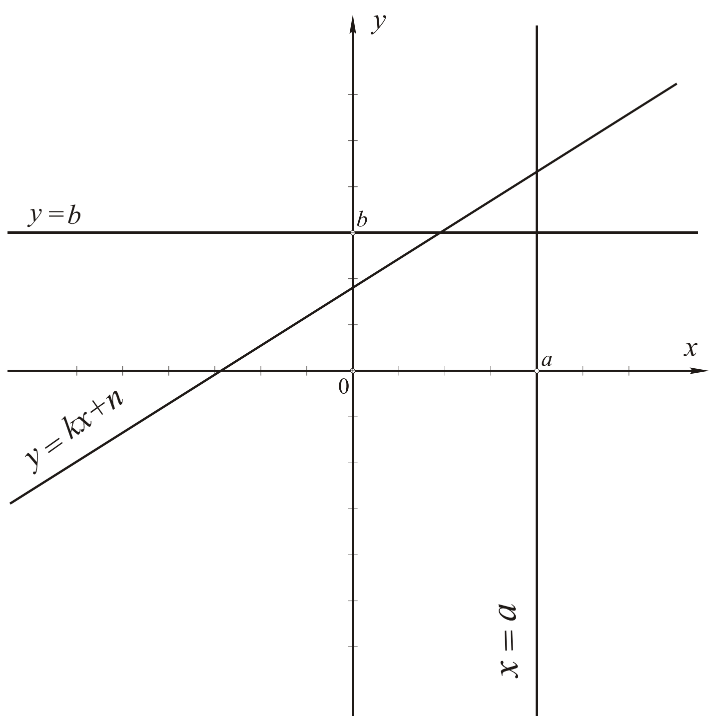
(2) Асимптоте функције:

Асимптота је права која према некој кривој заузима такав положај да јој се та крива стално "приближава" а никад је не сече.



Права у координантном систему може да буде; *вертикална;* *хоризонтална;* или *коса;*

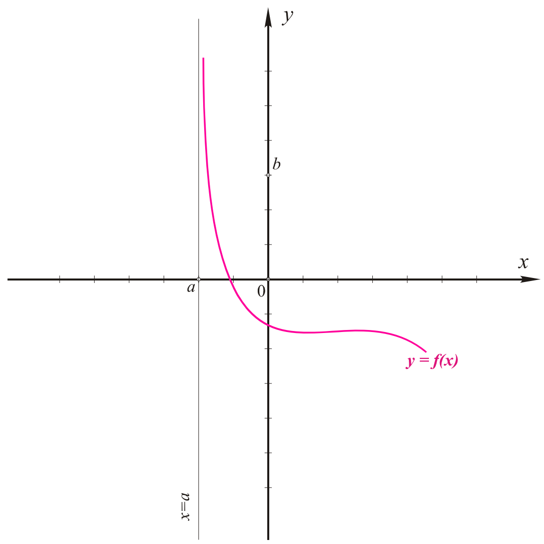
Те праве као и њихове једначине приказане су на следећој слици:



У том смислу, треба размотрити постојање <u>вертикалне</u>, <u>хоризонталне</u> и <u>косе</u> асимптоте.

<u>Вертикална асимптота</u>:

Ако је $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty}$ онда је права $\boxed{x = a}$ вертикална асимптота.

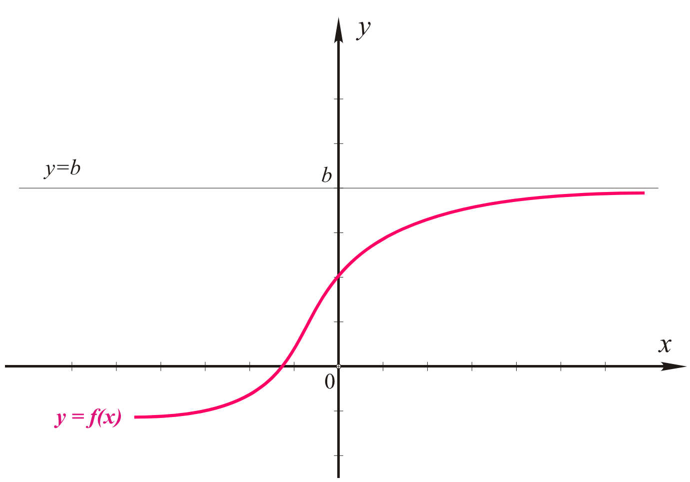


<u>НАПОМЕНА</u>:

"Кандидати" за број $\boxed{a}$ у претходном лимесу су тачке прекида или крајеви интервала из домена функције, што значи да вертикалних асимптота може постојати и више о једне.

<u>Хоризонтална асимптота</u>:

Ако постоји $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = b}$ онда је права $\boxed{y = b}$ хоризонтална асимптота.

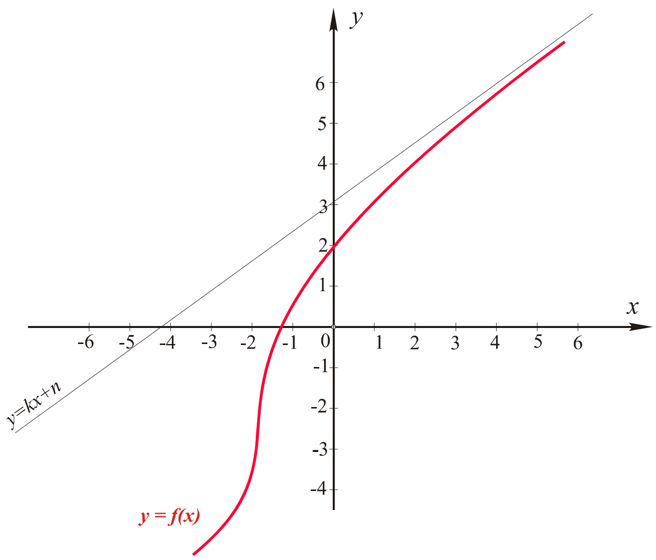


Коса асимптота:

Ако постоје лимеси:

$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$ и $\boxed{n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]}$

онда је права $\boxed{y=kx+n}$ коса асимптота.



НАПОМЕНА:

Хоризонтална и коса асимптота се међусобно искључују *(ако постоји хоризонтална онда не постоји коса асимптота и обрнуто)*, тачније, хоризонтална асимптота је специјалан случај косе асимптоте код које је $\boxed{k=0}$ односно хоризонтална асимптота има једначину: $\boxed{y=0\cdot x+n}$.

Испитајмо асимптоте дате функције: $\boxed{f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}}$**.**

"Вертикална Асимптота"

Пошто имамао две тачке прекида: $\left(-\sqrt{3}\right)$ и $\sqrt{3}$, то значи да треба испитати граничне вредности функције за обе тачке:

$$\lim_{x\to\left(-\sqrt{3}\right)}f(x)=\lim_{x\to\left(-\sqrt{3}\right)}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{3-\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-3\sqrt{3}}{3-3}=\frac{-3\sqrt{3}}{0}=\boxed{\infty}$$

Закључак: **Права** $\boxed{x=\left(-\sqrt{3}\right)}$ **је вертикална асимптота**

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^3}{3-x^2} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3-3} = \frac{3\sqrt{3}}{0} = \boxed{\infty}$$

Закључак: **Права** $\boxed{x=\sqrt{3}}$ **је вертикална асимптота.**

НАПОМЕНА:

У овом примеру нисмо испитивали *(леви и десни лимес >>)* , јер сазнање о томе да ли дата функција тежи ка $(+\infty)$ или $(-\infty)$ у околини тачке $\left(-\sqrt{3}\right)$ односно $\sqrt{3}$ ћемо имати кад испитамо "ЗНАК ФУНКЦИЈЕ". **(Како се израчунава леви и десни лимес за овај пример можете погледати:** ***<< ОВДЕ >>*** **)**

"Хоризонтална асимптота"

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{\frac{3}{x^3}}^{0} - \cancel{\frac{1}{x}}^{0}} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$$

Закључак:

Не постоји хоризонтална асимптота *(јер је* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *).*

"Коса асимптота"

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{3-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{3x-x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{3x}{x^3}-\frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0} - 1} = \frac{1}{0-1} = \boxed{-1} \qquad \boxed{k=(-1)}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - k\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{3-x^2} - (-1)\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x\left(3-x^2\right)}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} + 3x - \cancel{x^3}}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x^2}}{\frac{3}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\frac{3}{x}}^{0}}{\cancel{\frac{3}{x^2}}^{0} - 1} = \frac{0}{0-1} = \boxed{0} \qquad \boxed{n=0}$$

Закључак: **Права** $y = (-1)\cdot x + 0$ **односно** $\boxed{y=-x}$ **је коса асимптота.**

(додатни примери >>)

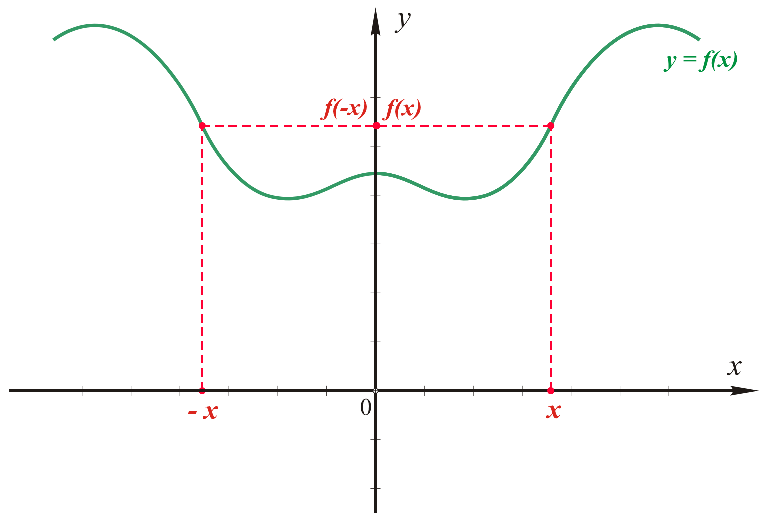
(<< Назад) ***(<< Повратак на почетак >>)***

(3) Парност функције:

Дефиниција:

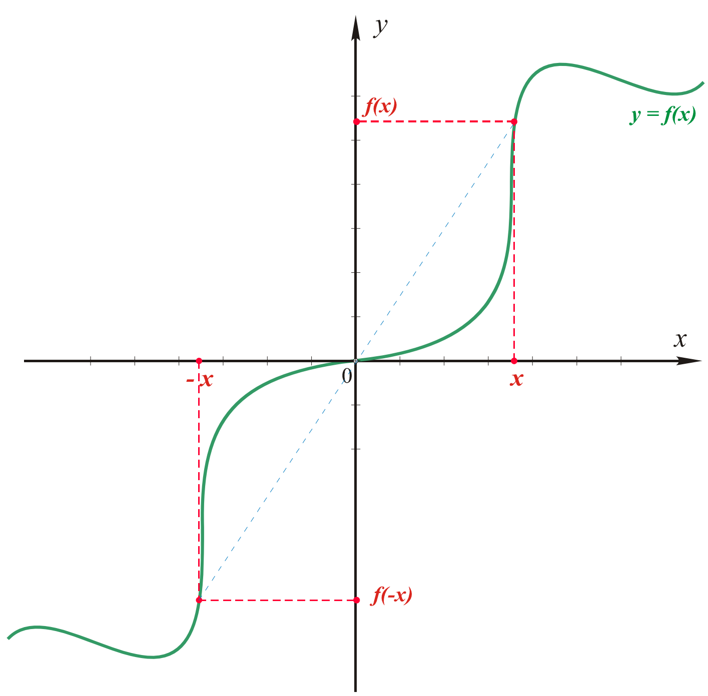
Функција $y = f(x)$ је парна *(симетрична у односу на* ***y-осу****)* ако је:

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$



Дефиниција:

Функција $y = f(x)$ је непарна *(симетрична у односу на координантни почетак)* ако је: $\boxed{f(-x) = -f(x)}$



Испитајмо <u>парност</u> дате функције: $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

$$f\left(-x\right)=\frac{\left(-x^3\right)}{3-\left(-x\right)^2}=-\frac{x^3}{3-x^2}=-f\left(x\right)$$

$$\boxed{f\left(-x\right)=-f\left(x\right)}$$

Закључак: **Дата функција је <u>непарна</u>.**

(Ако желите да сазнате више кликните на додатни примери >>)

(<< Повратак на почетак >>)

(4) <u>Нуле и знак функције</u>:

Треба одредити скуп вредности x за које је: $f\left(x\right)=0$; односно $f\left(x\right)>0$; односно $f\left(x\right)<0$. Дакле треба решити једначину:

$f\left(x\right)=0$ *(нуле-функције)*

и неједначине:

$$\left.\begin{matrix} f\left(x\right)>0 \\ f\left(x\right)<0 \end{matrix}\right\} \quad \textit{(знак функције)}$$

Испитајмо <u>нуле и знак</u> дате функције $\boxed{f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3-x^2}}$

"<u>нуле функције</u>"

$$\boxed{f\left(x\right)=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3}{3-x^2}=0$$

$$x^3=0$$

$$\boxed{x=0}$$

Дакле, $\boxed{f\left(x\right)=0}$ **за** $\boxed{x=0}$

<u>НАПОМЕНА</u>:

"<u>нуле функције</u>" представљају тачке у којима график функције пресеца x-осу

"<u>знак функције</u>"

Треба решити неједначине: $\boxed{f(x)>0}$ односно $\boxed{f(x)<0}$. Обе ове неједначине ћемо решити помоћу табеле.

(детаљно о решавању неједначина помоћу табеле >>)

Прво треба раставити на чиниоце бројилац и именилац разломка у датој функцији:

$$f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}$$

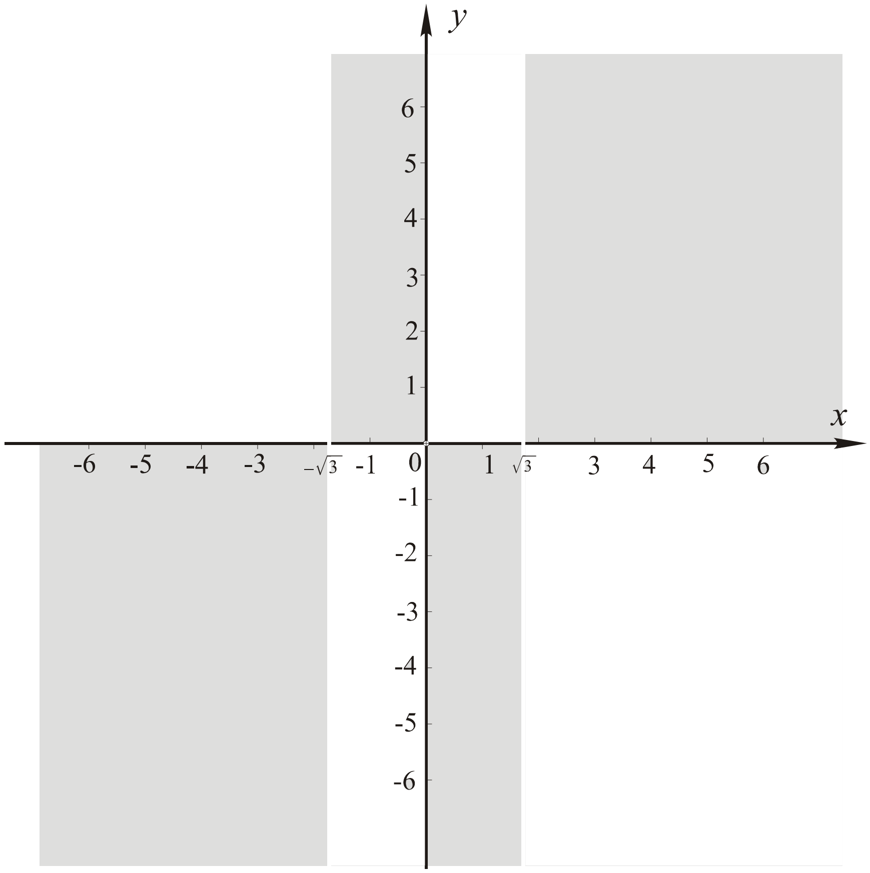
Формирајмо табелу:

$-\infty$	$\left(-\sqrt{3}\right)$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
$\sqrt{3}-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{3}+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$

Закључак: $\boxed{f(x)>0}$ **за** $\boxed{x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)}$

$\boxed{f(x)<0}$ **за** $\boxed{x\in\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)}$

(Добијени резултати нам говоре да грагик функције пресеца $x-$осу у тачки $x=0$, а да се график налази у <u>неосенченом делу</u> координантног система чији је приказ на следећој слици)



(<< Повратак на почетак >>)

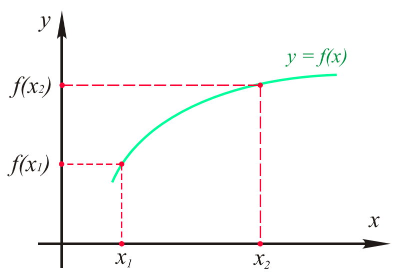
(додатни примери >>)

(5) Монотоност и екстремне вредности:

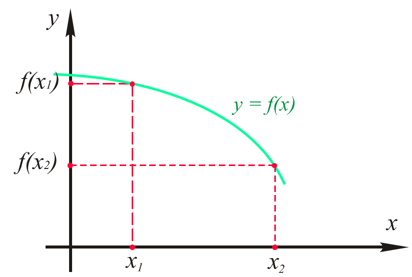
Дефиниција:

Нека је на интервалу (a,b) дефинисана функција $y = f(x)$. Ако за било које $x_1, x_2 \in (a,b)$ из пртпоставке да је $\boxed{x_1 < x_2}$ следи да је $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$ онда кажемо да је функција $y = f(x)$ монотоно растућа.

Ако из исте претпоставке да је $\boxed{x_1 < x_2}$ следи да је $\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$ онда кажемо да је функција $y = f(x)$ монотоно опадајућа.



(монотоно растућа)



(монотоно опадајућа)

Како је "извод функције у тачки x_0", $\boxed{f'(x_0)}$ *(у геометријском смислу)* једнак коефицијенту правца тангенте конструисане и тачки $T(x_0, f(x_0))$, односно, $f'(x_0) = k$, то имамо да од положаја тангенте зависи раст функције. Наиме, ако је тангента у посматраној тачки растућа онда је и сама функција у посматраној тачки растућа, а ако је тангента опадајућа у посматраној тачки онда је и сама функција опадајућа у опсматраној тачки.

Пошто је тангента права чија је једначина $\boxed{y = kx + n}$, односно, $\boxed{y = f'(x_0)\cdot x + n}$, то долазимо до следећег закључка:

Ако је $\boxed{f'(x_0) > 0}$ онда је функција $y = f(x)$ растућа у тачки x_0

ознака: $[\, f(x) \nearrow \,]$ *или* $[\, y \nearrow \,]$

Ако је $\boxed{f'(x_0) < 0}$ онда је функција $y = f(x)$ опадајућа у тачки x_0

ознака: $[\, f(x) \searrow \,]$ *или* $[\, y \searrow \,]$

Ако је $\boxed{f'(x_0) = 0}$ онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 нити расте нити опада. Наиме, она у тој тачки може *(а не мора)* да има ексремну вредност *(максимум* или *минимум)*

Дакле, <u>потребан услов</u> да функција $y = f(x)$ има екстрмну вредност у тачки x_0 је да је $\boxed{f'(x_0)=0}$ међутим он није и <u>довољан услов</u>.

ДОВОЉАН УСЛОВ ЗА ПОСТОЈАЊЕ ЕКСТРЕМА ФУНКЦИЈЕ:

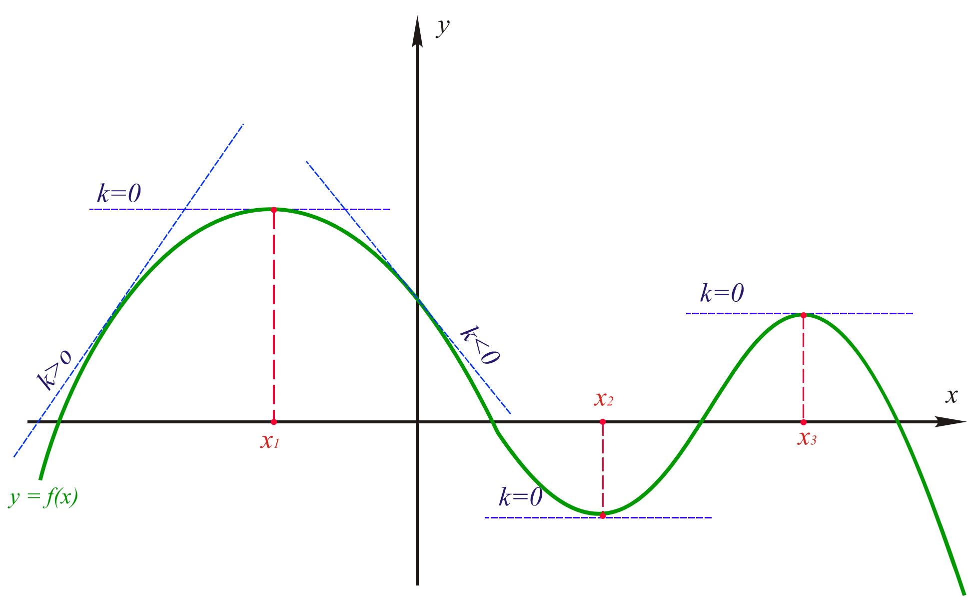
Нека је дата функција $y = f(x)$ непрекидна у тачки x_0 и нека она у тој тачки има први и други извод и нека је $\boxed{f'(x_0)=0}$:

Ако је $\boxed{f''(x_0)<0}$ *(други извод)* **онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 има <u>максимум</u>.**

Ако је $\boxed{f''(x_0)>0}$ *(други извод)* **онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 има <u>минимум</u>.**

Ако је $\boxed{f''(x_0)=0}$ *(други извод)* **онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 <u>нема екстремну вредност</u>.** *(у том случају функција у тачки x_0 има <u>превојну тачку</u>)*

Претходно разматрање приказано је на следећој слици:



Испитајмо **<u>монотоност и екстремне вредности</u>** **дате функције** $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ **.**

Код испитивања монотоности и екстремних вредности, ми заправо треба да одредимо <u>први извод</u> $\boxed{f'(x)}$ дате функције а онда, практично, да испитамо "<u>нуле и знак</u>" функције $\boxed{f'(x)}$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cdot\left(3-x^2\right)-x^3\cdot\left(3-x^2\right)'}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\cdot\left(3-x^2\right)-x^3\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2\cdot\left[3\left(3-x^2\right)+2x^2\right]}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\cdot\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\cdot\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}}$$

Сада треба испитати "<u>нуле и знак</u>" функције: $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}}$

$$\boxed{f'(x)=0}\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}=0$$

$$x^2(3-x)(3+x)=0$$

$$x^2=0\quad\vee\quad 3-x=0\quad\vee\quad 3+x=0$$

$$\boxed{x_1=0}\quad\vee\quad\boxed{x_2=3}\quad\vee\quad\boxed{x_3=(-3)}$$

Добили смо "стационарне тачке": $\boxed{x_1=0}$;$\boxed{x_2=3}$;$\boxed{x_3=(-3)}$.

Карактер тих тачака ћемо утврдити помоћу <u>другог извода</u> $\boxed{f''(x)}$.

Одредимо сада <u>други извод</u> $\boxed{f''(x)}$:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\left(\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=$$

$$=\frac{\left(9x^2-x^4\right)'\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\left(\left(3-x^2\right)^2\right)'}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\cdot 2\left(3-x^2\right)\cdot\left(3-x^2\right)'}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\cdot 2\left(3-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\cancel{\left(3-x^2\right)}\left[\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)+2\left(9x^2-x^4\right)\right]}{\left(3-x^2\right)^{\cancel{4}}}=$$

$$=\frac{2x\left(27-9x^2-6x^2\cancel{+2x^4}+18x^2\cancel{-2x^4}\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)^3\left(\sqrt{3}+x\right)^3}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)^3\left(\sqrt{3}+x\right)^3}}$$

(<< повратак на Конвексност; конкавност; ...)

Утврдимо сада карактер стационарних тачака: $\boxed{x_1=0}$; $\boxed{x_2=3}$; $\boxed{x_3=(-3)}$.

Треба, дакле, одредити: $\boxed{f''(x_1)}$; $\boxed{f''(x_2)}$; $\boxed{f''(x_3)}$; па на основу "знака" добијених резултата утврдити која од тих тачака представља екстремну вредност а која не.

$$f''(x_1)=f''(0)=\frac{6\cdot 0\left(9+0^2\right)}{\left(3-0^2\right)^3}=\boxed{0}$$

Пошто је: $\boxed{f''(0)=0}$ $\Rightarrow$ **дата функција у тачки** $\boxed{x_1=0}$ **нема ни максимум ни минимум.**

$$f''(x_2)=f''(3)=\frac{6\cdot 3\left(9+3^2\right)}{\left(3-3^2\right)^3}=\frac{18\cdot 18}{(-6)^3}=\frac{\cancel{6}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{6}\cdot 3}{-\cancel{6}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{6}^2}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

Како је: $\boxed{f''(3)=\left(-\frac{3}{2}\right)}<0 \Rightarrow$ **дата функција у тачки** $\boxed{x_2=3}$ **има <u>максимум</u>.**

Одредимо координате тог максимума:

$$y_{\max}=f(3)=\frac{3^3}{3-3^2}=\frac{27}{-6}=-\frac{9}{2}=\boxed{-4\frac{1}{2}}$$

Дакле, $\boxed{y_{\max}=\left(-4\frac{1}{2}\right)}$ **за** $\boxed{x_2=3}$ **, а тачка** $\boxed{E_1\left(3;-4\frac{1}{2}\right)}$ **представља тај <u>максимум</u>.**

$$f''(x_3)=f''(-3)=\frac{6\cdot(-3)\left(9+(-3)^2\right)}{\left(3-(-3)^2\right)^3}=\frac{-18\cdot 18}{(-6)^3}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

Пошто је: $\boxed{f''(x_3)=f''(-3)=\frac{3}{2}}>0 \Rightarrow$ **дата функција у тачки** $\boxed{x_3=(-3)}$ **има <u>минимум</u>.**

Одредимо координате тог минимума:

$$y_{\min}=f(-3)=\frac{(-3)^3}{3-(-3)^2}=\frac{-27}{-6}=\frac{9}{2}=\boxed{4\frac{1}{2}}$$

Дакле, $\boxed{y_{\min}=4\frac{1}{2}}$ **за** $\boxed{x_3=(-3)}$**, а тачка** $\boxed{E_2\left(-3;4\frac{1}{2}\right)}$ **представља тај <u>минимум</u>.**

Сада треба испитати <u>монотоност</u>, односно, испитати "знак функције"

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}}.$$

Формирајмо табелу:

	$-\infty$	-3	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	3 $+\infty$
x^2	+	+	+	+	+	+
$3-x$	+	+	+	+	+	−
$3+x$	−	+	+	+	+	+
$(3-x^2)^2$	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	−	+	+	+	+	−
$f(x)$	↘	↗	↗	↗	↗	↘

Закључак:

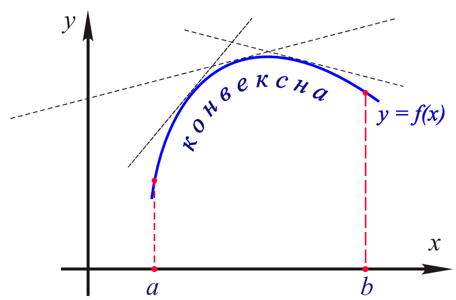
$\boxed{f(x)\nearrow}$ за $\boxed{x\in\left(-3;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};3\right)}$

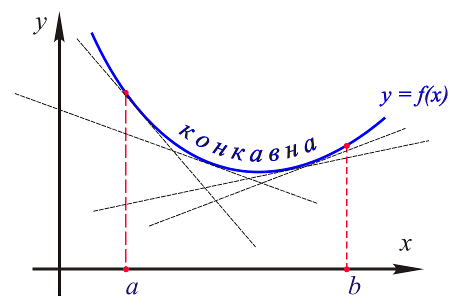
$\boxed{f(x)\searrow}$ за $\boxed{x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)}$

(<< Повратак на почетак >>)

(6) Конвексност; конкавност; превојне тачке:

Функција је конвексна на интервалу (a,b) ако се њен график налази испод тангенте конструисане у било којој којој тачки тог интервала. Ако се график налази изнад тангенте конструисане у било којој тачки интервала (a,b) онда је функција конкавна на том интервалу.





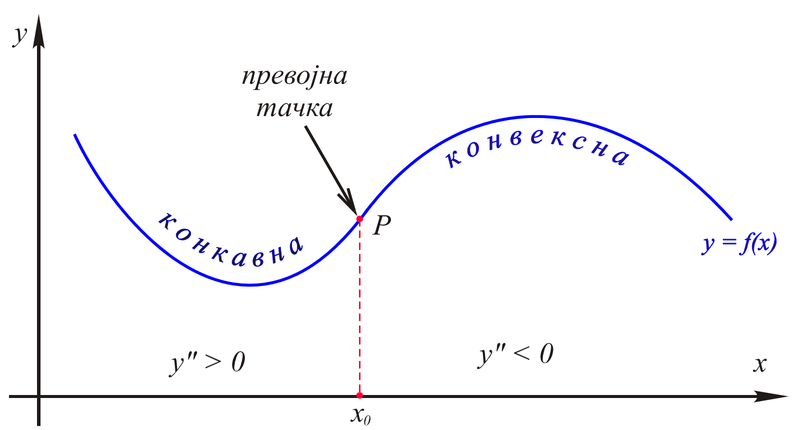
Теорема:

Нека је функција $y=f(x)$ непрекидна на интервалу (a,b) и нека она има први и други извод за $\forall x\in(a,b)$, тада важи:

Ако је $\boxed{f''(x)>0}$ за $\forall x\in(a,b)$ онда је функција $y=f(x)$ конкавна на том интервалу.

Ако је $\boxed{f''(x)<0}$ за $\forall x\in(a,b)$ онда је функција $y=f(x)$ конвексна на том интервалу.

Ако је $\boxed{f''(x_0)=0}$ за неко $x_0\in(a,b)$ онда функција $y=f(x)$ у тачки $\boxed{x_0}$ има превојну тачку.



Испитајмо <u>конвексност; конкавност и превојне тачке</u> дате функције:

$$\boxed{f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}}$$

Искористићемо већ добијене резултате за "други извод" из петходне тачке *(<< монотоност и екстремне вредности)*

Дакле,

$$\boxed{f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}}$$

....

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}}$$

....

$$\boxed{f''(x)=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}}=\frac{6x(9+x^2)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3}$$

Прво ћемо одредити <u>првојне тачке</u> а то значи да треба да решимо једначину:

$$\boxed{f''(x)=0} \Rightarrow \frac{6x(9+x^2)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3}=0$$

$$6x(9+x^2)=0 \qquad (\textit{пошто је } \boxed{9+x^2>0} \textit{ за свако } x\,)$$

$$6x=0$$

$$\boxed{x=0}$$

Дакле, функција $\boxed{f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}}$ има превојну тачку за $\boxed{x=0}$.

Израчунајмо $\boxed{f(0)}$ да бисмо одредили y *–координати* превојне тачке P.

$$f(0)=\frac{0^3}{3-0^3}=\frac{0}{3}=\boxed{0}$$

То значи да је <u>превојна тачка</u> $\boxed{P(0,0)}$.

Сада треба испитати "знак" функције: $\boxed{y''=\frac{6x(9+x^2)}{(\sqrt{3}-x)^3(\sqrt{3}+x)^3}}$ да бисмо

испитали <u>ковексност</u> и <u>конкавност</u>.

Формирајмо табелу:

	$-\infty$ … $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ … 0	0 … $\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$ … $+\infty$
$6x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$9+x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\sqrt{3}-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{3}+x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	*конкавна*	*конвексна*	*конкавна*	*конвексна*

Дакле:

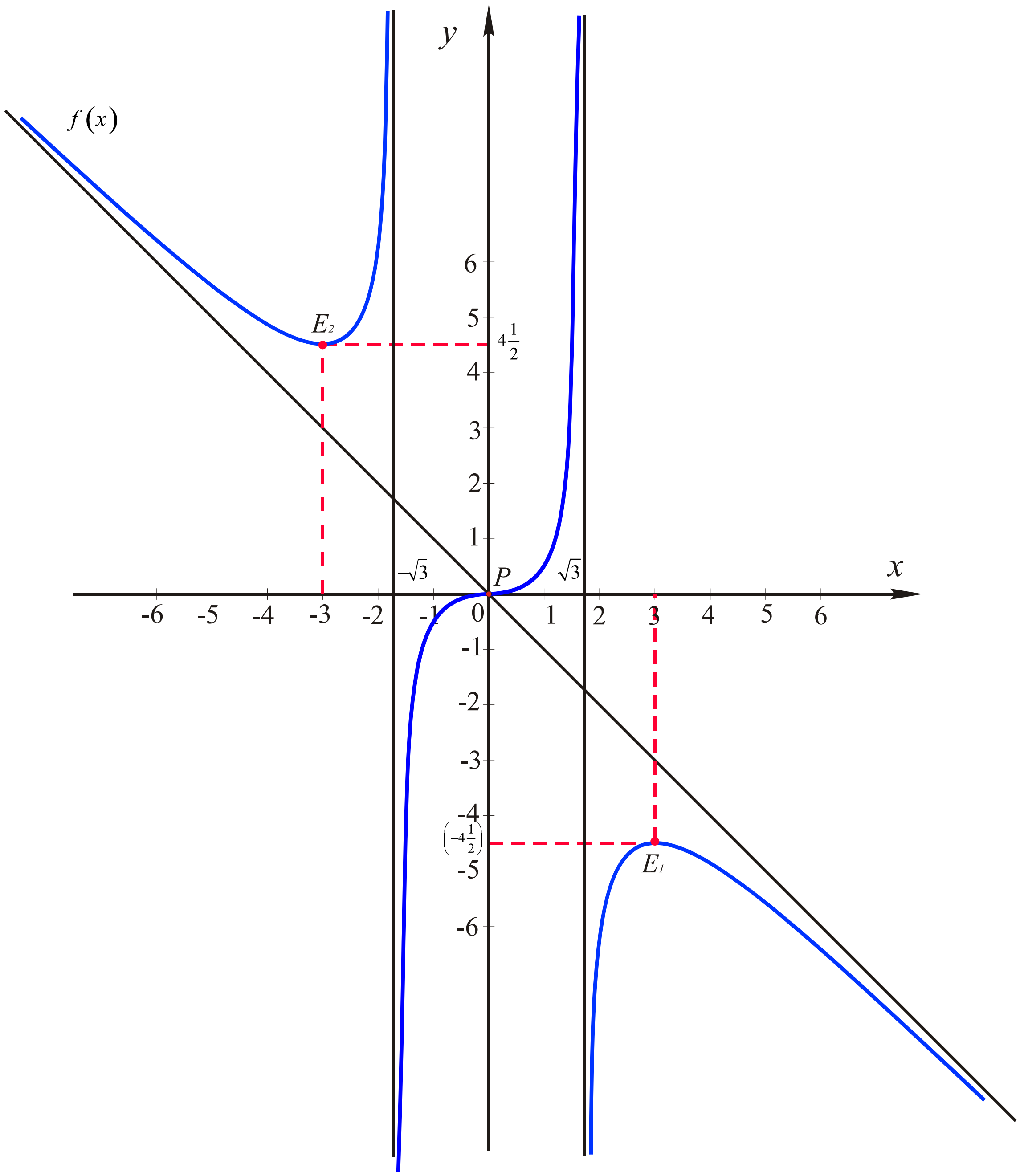
Дата функција је *конвексна* за $\boxed{x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)}$

Дата функција је *конкавна* за $\boxed{x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)}$

***Првојна тачка* је** $\boxed{P(0,0)}$**.**

Добијени резултати се могу видети на *графику >>* :

(7) График функције:



(<< Повратак на почетак >>)

ДОДАТНИ ПРИМЕРИ:

НАЈЧЕШЋИ ПРИМЕРИ за ДОМЕН ФУНКЦИЈЕ:

(A) **Израз са разломком:**

(Именилац разломка мора бити различит од нуле $(\ldots \neq 0)$ *)*

Пример 1:

Одредити домен функције $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2-3x}$

Решење:

$x^3+2x^2-3x \neq 0$

раставимо на чиниоце израз на левој страни неједнакости:

$x\left(x^2+2x-3\right) \neq 0$

$x\left(\underbrace{x^2-x}+\underbrace{3x-3}\right) \neq 0$

$x\left(x(x-1)+3(x-1)\right) \neq 0$

$\underbrace{x(x-1)(x+3) \neq 0}_{\Downarrow}$

$x \neq 0 \wedge (x-1) \neq 0 \wedge (x+3) \neq 0$

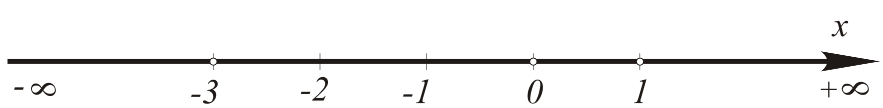
$\boxed{x \neq 0} \quad \wedge \quad \boxed{x \neq 1} \quad \wedge \quad \boxed{x \neq (-3)}$

(повратак на Пример 2 >>)

Домен функције је: $\boxed{D_f=\{x \in R \mid x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -3\}}$

или другачије записано: $\boxed{D_f=(-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)}$

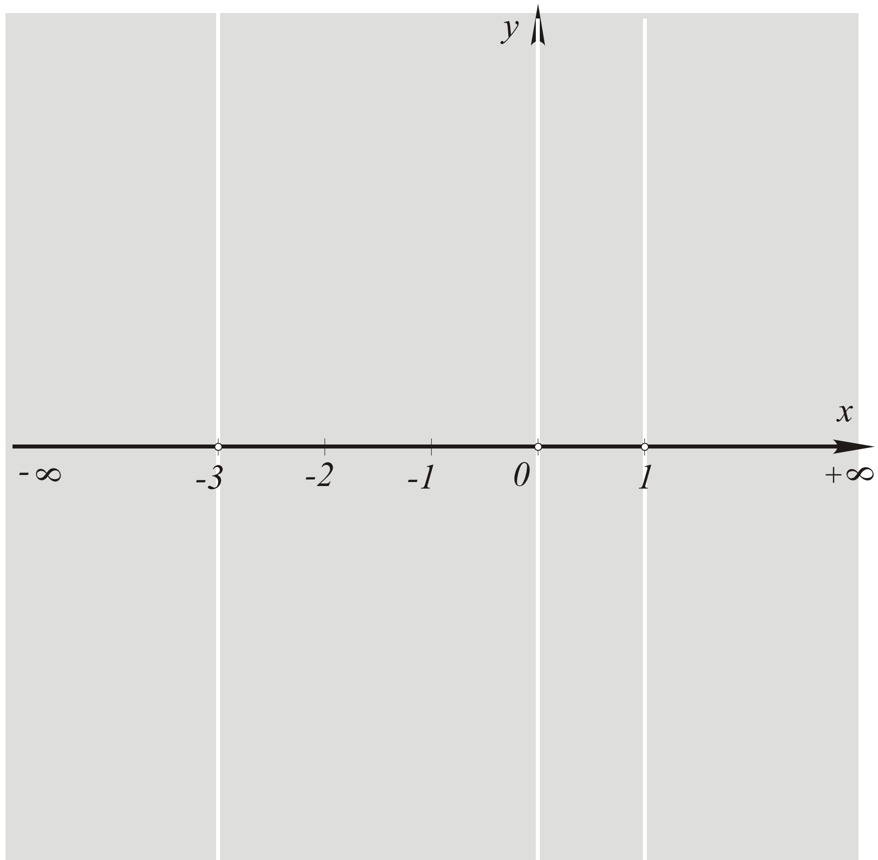
Графички приказ домена функције:



Дакле:

функција $y=f(x)$ **је дефинисана за** $\boxed{\forall x \in (-\infty,-3) \cup (-3,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)}$

Шта нам говори добијени резултат?
То нам говори да се график функције налази у осенченом делу координантног система који је приказан на следећој слици:



(Б) **Израз са парним кореном:**

(Израз који се налази под кореном мора бити ненегативан $(\ldots \geq 0)$*)*

Пример 2:

Одредити домен функције: $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x}}{x^2 + 1}$

Решење:

У овом примеру имамо два услова која мора да задовољи домен функције. Прво, израз под кореном мора бити ненегативан, друго, израз у имениоцу мора бити различит од нуле.

$x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + 1 \neq 0$

Израз $x^2 + 1 \neq 0$ за $\forall x \in R$.

Неједначину $x^3 + 2x^2 - 3x \geq 0$ ћемо решити помоћу табеле

Најпре треба раставити на просте чиниоце израз $\boxed{I(x)=x^3+2x^2-3x}$:

$$I(x)=x^3+2x^2-3x=x(x-1)(x+3)$$

*(поступак за растављане на чиниоце израза $I(x)$ показан је у **Примеру 1 >>**)*

Сада све добијене чиниоце поређати у табелу *(у прву колону)*:

*(Бројеви: **(-3); 0; 1;** који се налазе у првом реду изнад табеле, представљају "нуле - полинома" (x+3); x; (x+1); редом)*

У сваки ред табеле у одговарајућим пољима *(интервалима)* уписати знак $(+)$ где је полином *(из тог реда)* позитиван, односно знак $(-)$ где је полином негативан.

У последњем реду табеле је израз $I(x)$; у тим пољима *(интервалима)* уписати одговарајуће знакове $(+)$ или $(-)$ који се добију као "резултат множења" одговарајућих "знакова" који се налазе у тој колони изнад посматраног поља *(интервала)*

$-\infty$ (-3) 0 1 $+\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$I(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Скуп решења наше неједначине $\boxed{x^3+2x^2-3x\geq 0}$ су сви интервали у последњем реду табеле који су означени знаком $(+)$ укључујући и крајеве тих интервала *(јер решавамо неједначину у којој имамо " $\ldots\geq 0$")* т.ј. скуп решења је:

$$\boxed{\forall x\in[-3;0]\cup[1;+\infty)}$$

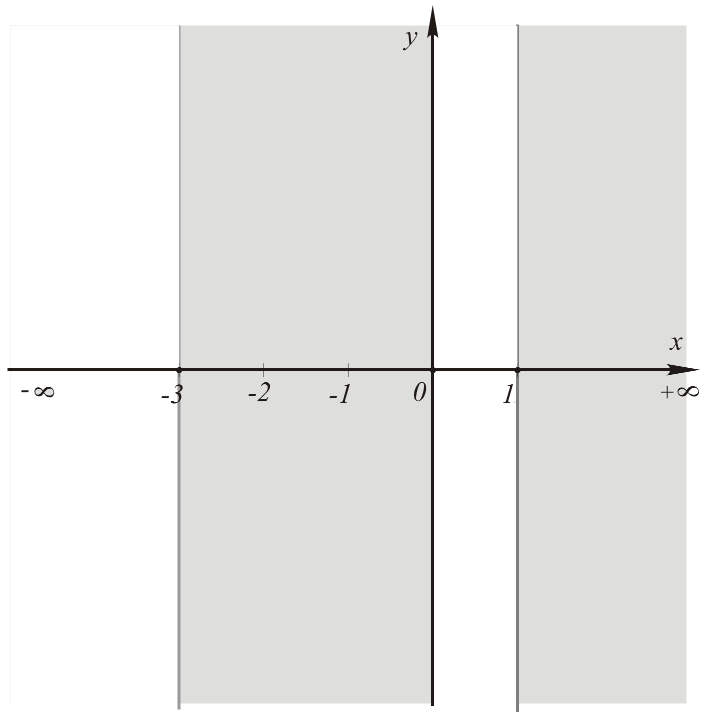
Како је скуп решења неједначине $\boxed{x^2+1\neq 0}$ читав скуп реалних бројева $\boxed{R}$, а скуп решења неједначине $\boxed{x^3+2x^2-3x\geq 0}$ је $\boxed{[-3;0]\cup[1;+\infty)}$ то је домен функције $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2-3x}}{x^2+1}$:

$$D_f=R\cap\left([-3;0]\cup[1;+\infty)\right)=[-3;0]\cup[1;+\infty)$$

Дакле:

Функција $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2 - 3x}}{x^2 + 1}$ **је дефинисана за** $\boxed{\forall x \in [-3;0] \cup [1;+\infty)}$.

График ове функције налази се у осенченом делу координантног система.



(B) **<u>Израз са логаритмом</u>:**

(израз који се логаритмује мора бити <u>строго већи од нуле</u> $(\ldots > 0)$ *)*

<u>Пример 3</u>:

Одредити домен функције: $y = \ln\left(\dfrac{-4x^2 + 19x - 12}{x^2 - 4}\right)$

<u>Решење</u>:

Дата функција је дефинисана за свако x за које је:

$$\boxed{\frac{-4x^2 + 19x - 12}{x^2 - 4} > 0}$$

Да бисмо решили ову неједначину потребно је да реставимо на просте чиниоце изразе: $\boxed{-4x^2 + 19x - 12}$ и $\boxed{x^2 - 4}$:

Квадратни трином $\boxed{-4x^2+19x-12}$ се може раставити на чиниоце помоћу формуле: $\boxed{Ax^2+Bx+C=A(x-x_1)(x-x_2)}$

$\boxed{-4x^2+19x-12}$

$A=(-4);\;\; B=19;\;\; C=(-12);$

$$x_{1,2}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot(-4)\cdot(-12)}}{2\cdot(-4)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{361-192}}{-8}$$

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{169}}{-8}$$

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm 13}{-8}$$

$$x_1=\frac{-19-13}{-8};\qquad x_2=\frac{-19+13}{-8}$$

$$x_1=\frac{-32}{-8};\qquad x_2=\frac{-6}{-8}$$

$$\boxed{x_1=4};\qquad \boxed{x_2=\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{-4x^2+19x-12=-4(x-4)\left(x-\frac{3}{4}\right)}$$

Израз $\boxed{x^2-4}$ се раставља на чиниоце као разлика квадрата:

$$\boxed{x^2-4=(x-2)(x+2)}$$

Дакле, ми сада решавамо неједначину:

$$\boxed{\frac{-4(x-4)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{(x-2)(x+2)}>0}$$

Формирајмо табелу:

$-\infty \qquad -2 \qquad \frac{3}{4} \qquad 2 \qquad 4 \qquad +\infty$

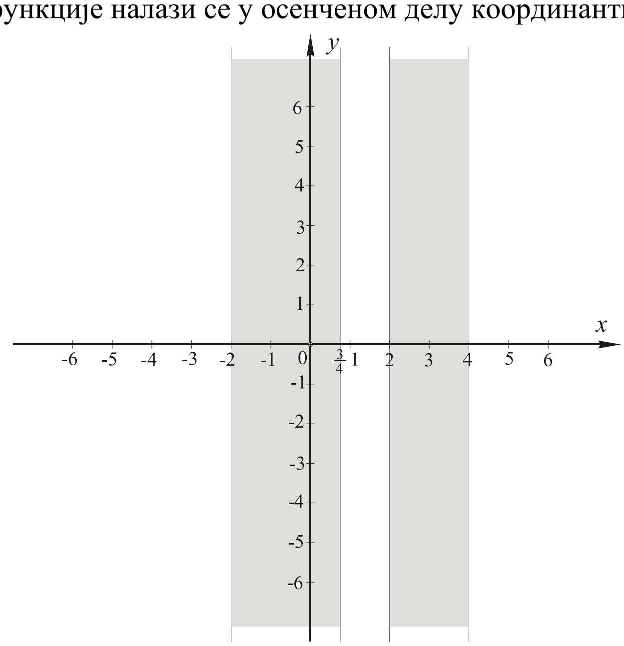
(-4)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-\frac{3}{4}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$I(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Скуп решења неједначине је: $\forall x \in \left(-2, \frac{3}{4}\right) \cup (2,4)$ односно: $\boxed{D_f = \left(-2, \frac{3}{4}\right) \cup (2,4)}$

Дакле:

Функција $y = \ln\left(\frac{-4x^2 + 19x - 12}{x^2 - 4}\right)$ **је дефинисана за** $\forall x \in \left(-2, \frac{3}{4}\right) \cup (2,4)$.

График ове функције налази се у осенченом делу координантног система:



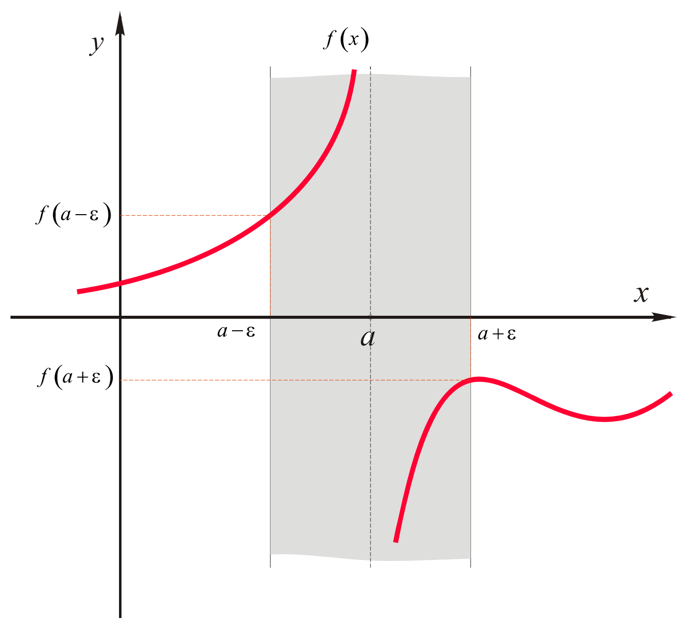
(<< Назад)

(<< Повратак на почетак >>)

ПРИМЕРИ за АСИМПТОТЕ ФУНКЦИЈЕ

Леви и десни лимес:

Ако испитујемо $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, онда можемо посматрати понашање функције $f(x)$ кад x тежи ка $\boxed{a}$ с лева и кад x тежи ка $\boxed{a}$ с десна. Због тога ћемо узети произвољну $\varepsilon - околону$ тачке a, то јест посматраћемо понашање функције $f(x)$ у интервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ где је $\boxed{\varepsilon > 0}$ произвољно мали број. Сда можемо дефинисати **леви лимес функције** $f(x)$ као $\boxed{\lim\limits_{x \to a-\varepsilon} f(x)}$ а **десни лимес функције** $f(x)$ као $\boxed{\lim\limits_{x \to a+\varepsilon} f(x)}$.



Дакле ми сада леви лимес израчунавамо као:

$$\lim_{x \to a-\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(a-\varepsilon) = \ldots$$

Односно десни лимес израчунавамо као:

$$\lim_{x \to a+\varepsilon} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(a+\varepsilon) = \ldots$$

Где је $\boxed{\varepsilon > 0}$ произвољно мали број.

Узмимо неки конкретан пример:

Пример 4:

Одредити леви и десни лимес функције $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ **у околини тачке:**

а) $\left(-\sqrt{3}\right)$

б) $\sqrt{3}$

решење:

а) **Леви лимес:**

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-\varepsilon}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(-\sqrt{3}-\varepsilon\right)^3}{3-\left(-\sqrt{3}-\varepsilon\right)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^2}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)}{3-\left(3+2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)}{3-3-2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)}{-\left(2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3}{2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}+9\cdot0+3\sqrt{3}\cdot0+0^3}{2\sqrt{3}\cdot0+0^2}=\frac{3\sqrt{3}+0+0+0}{0+0}=\frac{3\sqrt{3}}{0}=\boxed{+\infty}$$

Десни лимес:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+\varepsilon}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(-\sqrt{3}+\varepsilon\right)^3}{3-\left(-\sqrt{3}+\varepsilon\right)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^3}{3-\left(3-2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(3\sqrt{3}-9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2-\varepsilon^3\right)}{3-3+2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{-\left(3\sqrt{3}-9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2-\varepsilon^3\right)}{2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{-\left(3\sqrt{3}-9\cdot0+3\sqrt{3}\cdot0^2-0^3\right)}{2\sqrt{3}\cdot0-0^2}=\frac{-\left(3\sqrt{3}-0+0-0\right)}{0-0}=\frac{-3\sqrt{3}}{0}=\boxed{-\infty}$$

б) **Леви лимес:**

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-\varepsilon}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}-\varepsilon\right)^2}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}-9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2-\varepsilon^3}{3-\left(3-2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}-9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2-\varepsilon^3}{3-3+2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-9\cdot0+3\sqrt{3}\cdot0-0^3}{2\sqrt{3}\cdot0-0^2}=\frac{3\sqrt{3}-0+0-0}{0-0}=\frac{3\sqrt{3}}{0}=\boxed{+\infty}$$

Десни лимес:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+\varepsilon}\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+\varepsilon\right)^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3}{3-\left(3+2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3}{3-3-2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3}{-2\sqrt{3}\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{3\sqrt{3}+9\varepsilon+3\sqrt{3}\varepsilon^2+\varepsilon^3}{-\left(2\sqrt{3}\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=-\frac{3\sqrt{3}+9\cdot0+3\sqrt{3}\cdot0^2+0^3}{2\sqrt{3}\cdot0+0^2}=$$

$$=\frac{-\left(3\sqrt{3}+0+0+0\right)}{0+0}=\frac{-3\sqrt{3}}{0}=\boxed{-\infty}$$

(<< Назад)

(<< Повратак на почетак >>)

<u>Пример 5</u>:

Одредити асимптоте функције: $y=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$.

<u>Решење</u>:

Прво треба одредити "домен функције" да бисмо установили постојање тачака прекида:

$$x-2\neq0$$

$$x\neq2$$

Дакле: $\boxed{D_f=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)}$.

<u>Вертикална асимптота</u>:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\frac{2^2-5\cdot2+7}{2-2}=\frac{4-10+7}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

Права $\boxed{x=2}$ је вертикална асимптота.

<u>Хоризонтална асимптота</u>

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+7}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cancel{\frac{5}{x}}^{0}+\cancel{\frac{7}{x^2}}^{0}}{\cancel{\frac{1}{x}}^{0}-\cancel{\frac{2}{x^2}}^{0}}=\frac{1-0+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

Не постоји хоризонтална асимптота. *(јер је $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$)*

<u>Коса асимптота</u>:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+7}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+7}{x^2-2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cancel{\frac{5}{x}}^{0}+\cancel{\frac{7}{x^2}}^{0}}{1-\cancel{\frac{2}{x}}^{0}}=\frac{1-0+0}{1-0}=\boxed{1}$$

$\boxed{k=1}$

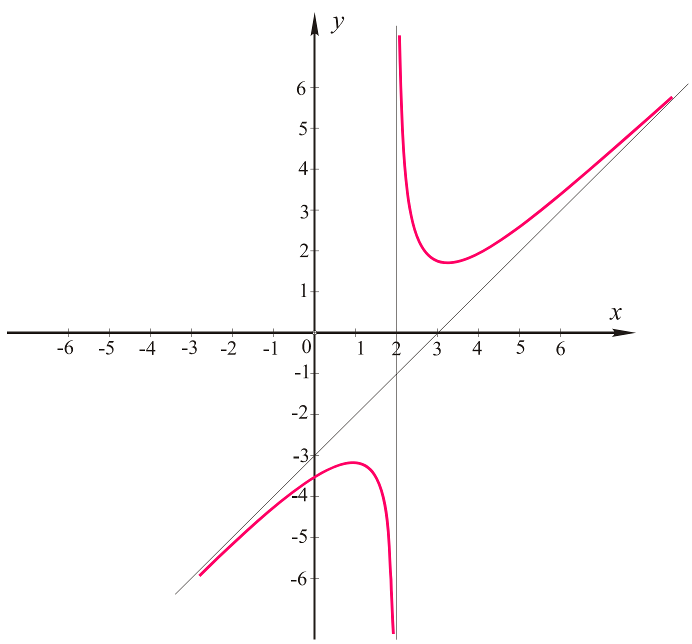
$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+7}{x-2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+7-x(x-2)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-5x+7-\cancel{x^2}+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-3x}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\frac{7}{x}}^{0}-3}{1-\cancel{\frac{2}{x}}^{0}}=\frac{0-3}{1-0}=\boxed{-3}$$

$\boxed{n=-3}$

Права $y=1\cdot x+(-3)$**, односно,** $\boxed{y=x-3}$ **је коса асимптота.**

Добијени резултати су приказани на графику:



(<< Назад)

(<< Повратак на почетак >>)

<u>Пример 6</u>:

Одредити асимптоте функције: $y=\dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

<u>Решење</u>:

Одредимо <u>домен</u> функције, како би утврдили постојање <u>тачака прекида</u>.

$$1-x^2\neq 0$$

$$x^2\neq 1$$

$$\boxed{x\neq \pm 1}$$

Дакле, $\boxed{D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)}$

<u>Вертикална асимптота</u>:

$$\lim_{x\to -1-\varepsilon}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1-\varepsilon)^2-4}{1-(-1-\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-4}{1-\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-3+2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-1-2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\left(3-\varepsilon-\varepsilon^2\right)}{-\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3-\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{3-0-0^2}{2\cdot 0+0^2}=\frac{3}{0}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to -1+\varepsilon}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-1+\varepsilon)^2-4}{1-(-1+\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-4}{1-\left(1-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\frac{-3-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-1+2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-3-2\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon-\varepsilon^2}=\frac{-3-0+0}{0-0}=\frac{-3}{0}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 1-\varepsilon}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^2-4}{1-(1-\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1-2\varepsilon+\varepsilon^2-4}{1-\left(1-2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-3-2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-1+2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-3-\varepsilon+\varepsilon^2}{2\varepsilon-\varepsilon^2}=\frac{-3-0+0^2}{2\cdot 0-0^2}=\frac{-3}{0}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 1+\varepsilon}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)^2-4}{1-(1+\varepsilon)^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1+2\varepsilon+\varepsilon^2-4}{1-\left(1+2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\frac{-3+2\varepsilon+\varepsilon^2}{1-1-2\varepsilon-\varepsilon^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-3+2\varepsilon+\varepsilon^2}{-2\varepsilon-\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\left(3-2\varepsilon-\varepsilon^2\right)}{-\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3-2\varepsilon-\varepsilon^2}{2\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{3-0-0}{0-0}=\frac{3}{0}=\boxed{+\infty}$$

Праве $\boxed{x=(-1)}$ и $\boxed{x=1}$ су вертикалне асимптоте.

Хоризонтална асимптота:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cancel{\frac{4}{x^2}}^{0}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}^{0}-1}=\frac{1-0}{0-1}=\boxed{-1}$$

Права $\boxed{y=(-1)}$ **је хоризонтална асимптота.**

(<< Назад)

(<< Повратак на почетак >>)

ПРИМЕРИ за ПАРНОСТ ФУНКЦИЈЕ:

Пример 7:

Испитати парност функције:

a) $y=\frac{1-x^2}{x^4+3}$

b) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$

c) $y=x-\frac{x^2+3x}{2-x}$

Решење:

a) $f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{(-x)^4+3}=\frac{1-x^2}{x^4+3}=f(x)$

Функција је парна.

b) $f(-x)=\frac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}=-\frac{x^3}{3-x^2}=-f(x)$

Функција је непарна.

c) $f(-x)=(-x)-\frac{(-x)^2+3(-x)}{2-(-x)}=-x-\frac{x^2-3x}{2+x}\neq\pm f(x)$

Функција није ни парна ни непарна.

(<< назад)

(<< Повратак на почетак >>)

ПРИМЕРИ за НУЛЕ И ЗНАК ФУНКЦИЈЕ

Пример 8:

Одредити нуле и знак функције: $y=\dfrac{12x^2-3x^3+15x}{9-x^2}$

Решење:

"нуле функције"

$$\boxed{y=0} \Rightarrow \boxed{\frac{12x^2-3x^3+15x}{9-x^2}=0}$$

$$12x^2-3x^3+15x=0 \quad \wedge \quad 9-x^2\neq 0$$

$$-3x\left(-4x+x^2-5\right)=0 \quad \wedge \quad \boxed{(3-x)(3+x)\neq 0}$$

$$-3x\left(x^2-4x-5\right)=0 \quad \wedge \quad (3-x\neq 0 \quad \wedge \quad 3+x\neq 0)$$

$$-3x\left(\underline{x^2+x}\,\underline{-5x-5}\right)=0 \quad \wedge \quad (x\neq 3 \quad \wedge \quad x\neq(-3))$$

$$-3x\left[x(x+1)-5(x+1)\right]=0$$

$$\boxed{-3x(x+1)(x-5)=0}$$

$$-3x=0 \,/:(-3) \quad \vee \quad x+1=0 \quad \vee \quad x-5=0$$

$$\left(\boxed{x_1=0} \quad \vee \quad \boxed{x_2=(-1)} \quad \vee \quad \boxed{x_3=5}\right) \wedge \quad (x\neq 3 \quad \wedge \quad x\neq(-3))$$

Дакле, $\boxed{y=0}$ за: $\boxed{x_1=0}$ или $\boxed{x_2=(-1)}$ или $\boxed{x_3=5}$.

НАПОМЕНА:

"нуле функције" представљају тачке у којима график функције пресеца x-осу.

"знак функције"

Треба решити неједначине: $\boxed{y>0}$ и $\boxed{y<0}$. Кад се неједначина решава помоћу табеле онда се у тој табели добијају решења за обе поменуте нејадначине. Дакле, решавамо неједначине:

$$\frac{12x^2-3x^3+15x}{9-x^2}>0 \quad \text{и} \quad \frac{12x^2-3x^3+15x}{9-x^2}<0$$

Кад ове изразе раставимо на чиниоце добијамо неједначине:

$$\frac{-3x(x+1)(x-5)}{(3-x)(3+x)}>0 \quad \text{односно} \quad \frac{-3x(x+1)(x-5)}{(3-x)(3+x)}<0$$

Формирајмо табелу:

	$-\infty$ до -3	-3 до -1	-1 до 0	0 до 3	3 до 5	5 до $+\infty$
$-3x$	+	+	+	−	−	−
$x+1$	−	−	+	+	+	+
$x-5$	−	−	−	−	−	+
$3-x$	+	+	+	+	−	−
$3+x$	−	+	+	+	+	+
y	−	+	−	+	−	+

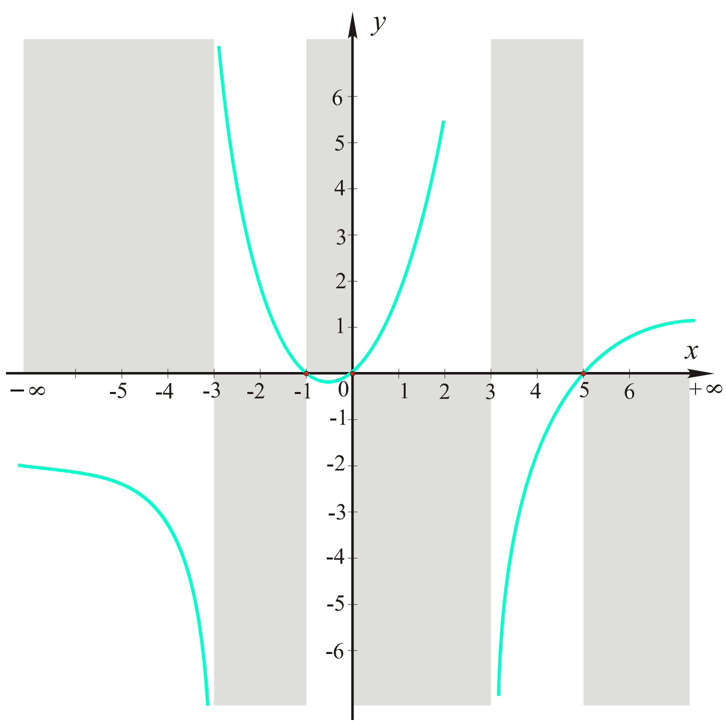
Дакле,

$\boxed{y>0}$ за $\boxed{x\in(-3,-1)\cup(0,3)\cup(5,+\infty)}$

$\boxed{y<0}$ за $\boxed{x\in(-\infty,-3)\cup(-1,0)\cup(3,5)}$

Шта нам добијени резултати говоре?

График функције се налази у <u>неосенченом</u> делу координантног система а *x-осу* пресеца у тачкама: -1; 0; и 5, што је приказано на следећој слици:



(<< Назад)
(<< Повратак на почетак >>)

РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ ПОМОЋУ ТАБЕЛЕ

Кад решавамо неку "компликовану" неједначину $\boxed{I(x)>0}$ *или* $\boxed{I(x)<0}$ *онда обе ове неједначине можемо решити помоћу табеле коју формирамо на следећи начин:*

<u>Прво</u>: Израз $\boxed{I(x)}$ *раставимо на просте чиниоце, рецимо:*

$$I(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)\cdot Q_3(x)\cdot\ldots\cdot Q_n(x)$$

<u>Друго</u>: Одредимо нуле сваког од добијених чинилаца, то јест решимо једначине:

$$Q_1(x)=0;\quad Q_2(x)=0;\quad Q_3(x)=0;\quad \ldots\quad Q_n(x)=0;$$

Нека су сва добијена решења: $x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots\ x_m$ *(Напоменимо да број решења не мора да буде **n** јер не мора свака од једначина да има решење)*

<u>Треће</u>: Поређајмо све добијене чиниоце: $Q_1(x);\ Q_2(x);\ Q_3(x);\ \ldots\ Q_n(x);\ I(x)$ *у прву колону табеле.*

<u>Четврто</u>: У ред изнад табеле поређајмо: $-\infty;\ x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots\ x_m;\ +\infty$ *по величини почев од најмањег до највећег*
(овде смо претпоставили да је $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_m$*)*

Та табела изгледа овако:

	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_m	$+\infty$
$Q_1(x)$				…		
$Q_2(x)$				…		
$Q_3(x)$				…		
…	…	…	…	…	…	
$Q_m(x)$				…		
$I(x)$				…		

Сада у празна поља у сваком реду табеле уписујемо знак $(+)$ *или* $(-)$ *у зависности од тога да ли је одговарајући израз* $Q_i(x)$ *позитиван или негативан.*

Коначно, у последњем реду уписујемо знак $(+)$ *или* $(-)$ *као резултат у одговарајућј <u>колони</u>.*

(<< Назад)

Узмимо неке конкретне примере:

<u>Пример 9</u>:

Решити неједначину: $\boxed{\dfrac{25x-x^3}{x^4-16}>0}$

<u>Решење</u>:

Раставимо на просте чиниоце израз: $\dfrac{25x-x^3}{x^4-16}$

$$\frac{25x-x^3}{x^4-16}=\frac{x\left(25-x^2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{x(5-x)(5+x)}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}$$

Дакле, дата неједначина је еквивалентна са неједначином:

$$\boxed{\frac{x(5-x)(5+x)}{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}>0}$$

Одредимо <u>нуле</u> добијених чинилаца, то јест решимо једначине:

$x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$

$5-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=5$

$5+x=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=(-5)$

$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_4=2$

$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x_5=(-2)$

$x^2+4-0 \quad \Rightarrow$ *(нема реална решења)*

Формирајмо табелу:

	- ∞ … -5	-5 … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … 5	5 … + ∞
x	−	−	−	+	+	+
$5-x$	+	+	+	+	+	−
$5+x$	−	+	+	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+	+
$x+2$	−	−	+	+	+	+
x^2+4	+	+	+	+	+	+
$I(x)$	+	−	+	−	+	−

Дакле, скуп решења дате неједначине $\boxed{\dfrac{25x-x^3}{x^4-16}>0}$ је:

$\boxed{x\in(-\infty,-5)\cup(-2,0)\cup(2,5)}$

(<< Назад) *(<< Повратак на почетак >>)*

<u>Пример 10</u>:

Решити неједначину: $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$

<u>Решење</u>:

Најпре треба дату неједначину довести на облик: $I(x)>0$

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$$

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}+3>0$$

$$\frac{x^2-2x+3+3\left(x^2-4x+3\right)}{x^2-4x+3}>0$$

$$\frac{x^2-2x+3+3x^2-12x+9}{x^2-4x+3}>0$$

$$\frac{4x^2-14x+12}{x^2-4x+3}>0$$

Раставимо на чиниоце дати израз:

$$\frac{2\left(2x^2-7x+6\right)}{x^2-x-3x+3}>0$$

$$\frac{2\left(2x^2-3x-4x+6\right)}{x(x-1)-3(x-1)}>0$$

$$\frac{2\left[x(2x-3)-2(2x-3)\right]}{(x-1)(x-3)}>0$$

$$\frac{2(2x-3)(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0 \Big/ :2$$

$$\boxed{\frac{(2x-3)(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0}$$

<u>Напомена</u>

Ако решимо <u>неједначине</u> (уместо одговарајућих једначина):

$2x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>\boxed{\dfrac{3}{2}}$

$x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>\boxed{2}$

$x-1>0 \quad \Rightarrow \quad x>\boxed{1}$

$x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>\boxed{3}$

тиме смо добили информацију где треба писати знак $(+)$ у наредној табели као и бројеве које треба уписати у први ред изнад табеле:

Формирајмо табелу:

	$-\infty$ … 1	1 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … 2	2 … 3	3 … $+\infty$
$2x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$I(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Скуп решења дате неједначине је:

$$\boxed{x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (3, +\infty)}$$

(<< Назад)

(<< Повратак на почетак >>)